Classification thématique de MÉGAMATHS

Rubrique : nombres
Réf. Anthologie des questions du jury du CAPES maths, Vol. III / Éd. >2021 à paraître

Existe-t-il deux entiers naturels a et b distincts entre eux tels que $a^b = b^a$?

Voici une question qu'il est facile de poser à un oral de concours pour observer la réaction du candidat qui devra résoudre une équation en nombre entiers en utilisant n'importe quel domaine des mathématiques.

QUESTION

Existe-t-il deux entiers naturels a et b distincts entre eux tels que $a^b = b^a$? Trouvez-les tous.

RÉPONSE

L'égalité $a^b = b^a$ est triviale si $a = b$. Supposons maintenant que $a \neq b$, ce qui impose d'avoir $ab \neq 0$. Alors :

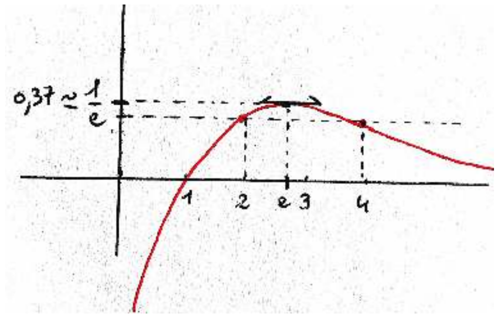
$$a^b = b^a \iff \frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b}$$

et l'on est amené à étudier la fonction f de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $\frac{\ln x}{x}$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

On en déduit le tableau de variations suivant et l'allure de la courbe représentative de f :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\| -\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e} \simeq 0,37$	$\searrow$	0_+



Les variations de f bien observables sur le graphique montrent que $\frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}$ n'est possible que si a ou b est égal à 2. Bien entendu a et b jouent des rôles symétriques. Nous sommes alors amenés à résoudre l'équation :

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 2}{2} \quad (*)$$

avec x entier et $x \geq e$. Comme :

$$\frac{\ln 2}{2} \simeq 0,347; \quad \frac{\ln 3}{3} \simeq 0,366; \quad \frac{\ln 4}{4} \simeq 0,347; \quad \frac{\ln 5}{5} \simeq 0,322$$

la seule possibilité pour x est d'être égal à 4, ce qui est aussi indiqué par la résolution graphique de l'équation $(*)$. On vérifie que :

$$\frac{\ln 4}{4} = \frac{\ln 2^2}{4} = \frac{2 \ln 2}{4} = \frac{\ln 2}{2}$$

donc 2 et 4 sont bien les seules solutions entières (distinctes entre elles) vérifiant l'égalité $\frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b}$.